

Exercice 1: Nature des séries numériques

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n^2 - 1} \quad \underline{3pts} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}{n^n} \quad \underline{3pts}$$

Exercice 2: a) Trouver le domaine de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ 3pts

b) Par dérivation et intégration terme à terme trouver la somme de cette série entière. 3pts

c) D'écire de ce qui précède la somme de la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 3pts

Exercice 3: Soit f la fonction périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{pour } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{pour } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de f . 1pt

b) Calculer la série de Fourier de f . 4pts

$$\sum (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

di atas
 replace
 x par $-x$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

di atas
 replace
 x par x

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

di atas
 replace
 x par x^2

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\pi x \cos kn \, dx \quad \cdot \quad u = x \quad dv = \cos kn \, dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{\sin kn}{k}$$

$$\int_0^\pi x \cos kn \, dx = \left[\frac{x \sin kn}{k} \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \frac{\sin kn}{1} \, dx$$

$$= -\frac{1}{k} \left[-\frac{\cos kn}{k} \right]_0^\pi = \frac{1}{k^2} \left[\cos kn \right]_0^\pi = \frac{1}{k^2} [\cos k\pi - \cos 0]$$

$$= \frac{1}{k^2} \begin{cases} 0 & \text{if } k \text{ pair} \\ -2 & \text{if } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$= \frac{2}{k^2} \text{ avec } k \text{ impair}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \right]$$

Exercice 1: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$ Série alternée $u_n = \frac{1}{2n^2-1}$ 1pt

Th^m de LEIBNIZ 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2-1} = 0$ 4pt

2) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

$$n_1 \leq n_2 \Rightarrow 2n_1^2-1 \leq 2n_2^2-1 \Rightarrow \frac{1}{2n_1^2-1} \geq \frac{1}{2n_2^2-1}$$

$\Rightarrow u_{n_1} \geq u_{n_2} \Rightarrow (u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante 1pt

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)}{n^n} \quad a_n = \frac{2n!}{n^n}$$

Critère de D'ALEMBERT $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2n!} = 2pt$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad 1pt$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \quad 1pt$$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n^n}$ est convergente

13-01-2019Suivre du corrigé de l'examen final de MATH03 page 3

Exercice 2: a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{1} = 1 = l \quad 0,5 \text{ pt}$$

le rayon de convergence $R = \frac{1}{l} = 1 \Rightarrow$

intervalle de convergence $=]-1, 1[$ 0,5 pt

Nature des séries numériques aux points $x = -1$ et $x = 1$

* $x = 1$ $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ série alternée avec $u_n = \frac{1}{2n+1}$

Th de Leibniz 1°) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

2°) $u_1 \geq u_2 \Rightarrow 2n_1 \geq 2n_2 \Rightarrow 2n_1 + 1 \geq 2n_2 + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2n_1+1} \leq \frac{1}{2n_2+1} \Rightarrow u_{n_1} \leq u_{n_2} \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est

convergente 0,5 pt

* $x = -1$ $\frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{(-1)^{3n+1}}{2n+1} = \frac{(-1)^{2n} (-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ série alternée convergente d'après ce qui précède 0,5 pt

$\Rightarrow$ domaine de convergence $= [-1, 1]$ 1 pt

13-01-2019

Suite des corrigés de l'examen final de MATH03 page 3

Exercice 2: b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ posons $f(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

$$f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{2n+1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^{2n} \quad 0,5 \text{ pt}$$

On sait que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

Si on remplace x par $-x$ on obtient $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$ 0,5 pt

Si on remplace x par x^2 on obtient $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$

donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ 0,5 pt

En intégrant terme à terme l'égalité

précédente on obtient $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ 0,5 pt

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctg x}$$

avec x est le
nombre de
 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ 1 pt

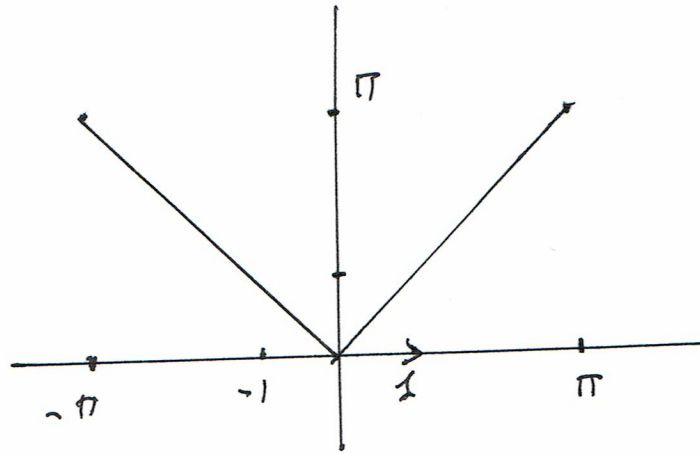
Puis que $x=1$ appartient au domaine de convergence
de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1} = \arctg 1$ 1 pt

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

1 pt

13-01-2019Corrigé de l'examen final de MATH03 page 4Exercice 3 :

a)



1 pt

$$b) f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } 0 \leq x \leq \pi \\ -x & \text{pour } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

On remarque d'après le graphique que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

on a $f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ est paire 0,5 pt

Dans ce cas la série de Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 0,5 pt

ne contient que des termes en cosinus

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2} \quad 0,5 \text{ pt}$$

pour $k \geq 1$ $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx$ car $f(x)$ est paire 0,5 pt

$$\int_0^{\pi} x \cos kx dx = \left[\frac{x \sin kn}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kn}{k} dx = 0 - \left[-\frac{\cos kn}{k^2} \right]_0^{\pi} \quad 0,5 \text{ pt}$$

$$= -\left[\frac{\cos k\pi + \cos 0}{k^2} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \quad \text{d'où la série de Fourier} \quad 0,5 \text{ pt}$$

$$\text{de } f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \dots \right] \quad 4 \text{ pt}$$